

位相空間の代数化：Pointless Topology とロケール理論

1. 開集合系の代数化：フレームとその準同型

位相空間 X の開集合系 $\mathcal{O}(X)$ が持つ性質を抽出し、以下のように代数系を定義します。

フレーム (Frame) の定義

半順序集合 L が完備束であり、任意の結び (\bigvee) と有限の交わり (\bigwedge) の間に無限分配律が成り立つとき、これをフレームと呼びます。

$$x \wedge \left(\bigvee_{i \in I} y_i \right) = \bigvee_{i \in I} (x \wedge y_i)$$

これは、開集合系において「任意の和集合」と「有限の共通部分」が開集合となる性質の抽象化です。

フレーム準同型写像

2つのフレーム L, M の間の写像 $h: L \rightarrow M$ で、任意の結びと有限の交わりを保つものをフレーム準同型写像と呼びます。

これは、連続写像 $f: X \rightarrow Y$ による開集合の逆像 $f^{-1}: \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ の性質そのものです。これにより、位相空間の圏 \mathbf{Top} からフレームの圏 \mathbf{Frm} への反変関手 Ω が定まります。

2. 空間 (対象) の復元: T_1 空間と Sober 空間

束構造のみから元の「点」の集合を特定し、空間を再構築するアプローチには、主に2つの視点があります。束において「点」に相当するものは完全素フィルター (空間における既約閉集合に対応) です。

アプローチA: 極小完全素フィルター (T_1 空間)

空間が T_1 空間 (1点集合が閉集合) である場合、1点集合は「極小な既約閉集合」となります。したがって、束の中から極小完全素フィルターのみを拾い上げることで、点の集合を過不足なく正確に特定し、元の空間と同相な位相を復元できます (Thronの定理)。

アプローチB: すべての完全素フィルター (Sober空間)

空間が Sober (ソバー) 空間 (任意の既約閉集合がただ1つの生成点を持つ空間) である場合、「すべての既約閉集合」と「点」が完全に1対1対応します。したがって、極小かどうかにかかわらずすべての完全素フィルターを点とみなすことで、元の空間を復元できます。

結論 (対象の復元):

対象 (位相空間) を特定するだけであれば、空間が T_1 または Sober のいずれかの条件を満たしていれば、開集合系の束構造から一意に復元可能です。

3. 圏同値性の確立と「幽霊点」の問題

対象の復元だけでなく、「連続写像」と「フレーム準同型写像」の間に完全な翻訳関係 (圏同値) を構築しようとすると、 T_1 空間では破綻が生じ、Sober空間への制限が必須となります。

なぜ T_1 空間では圏同値にならないのか?

すべてのフレーム準同型写像 $h: \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ の背後には、必ず Y 上の既約閉集合 A が隠れています。空間 Y が T_1 だが Sober でない場合 (例: 無限集合の補有限位相)、空間内に「生成点を持たない既約閉集合 (実体のない幽霊点)」が存在し得ます。フレーム準同型 h がこの幽霊点を指し示してしまった場合、それを引き起こすような現実の連続写像 f は構成できず、関手が充満 (Full) になりません。

Sober空間による圏同値 (ストーンの双対性)

空間が Sober であれば、すべての既約閉集合には必ず「唯一の生成点 (実在の点)」が存在します。そのため、フレーム準同型がどれほど抽象的に作られても、必ず実在の点を指し示す連続写像として現実空間に引き戻すことができます。

これにより、以下の完全な圏同値が成立します。

4. ロケール理論と空間的ロケール (Spatial locale)

前節で登場した「空間的ロケール (Spatial locale)」について、その厳密な定義と意味を補足します。これらを理解するためには、まず「ロケール (Locale)」という概念を導入する必要があります。

ロケール (Locale) の定義

ロケールとは、位相空間の「開集合系」の代数的な性質を抽出した**フレーム**を、幾何学的な視点から捉え直したものです。

圏論的に言うと、ロケールの圏 **Loc** は、フレームの圏 **Frm** の**反対圏 (opposite category)** として定義されます。

$$\mathbf{Loc} = \mathbf{Frm}^{op}$$

- **対象 (ロケール)** : フレームと同じもの (完備束であり、無限分配律を満たすもの)。
- **射 (ロケールの射)** : ロケール L から M への射 $f: L \rightarrow M$ は、フレーム準同型 $h: M \rightarrow L$ として定義されます。矢印の向きを逆にするのは、連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、開集合の逆像 $f^{-1}: \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ が定まるという幾何学的な直観に対応させるためです。

空間的ロケール (Spatial locale) の定義

ロケール L が **空間的 (spatial)** であるとは、以下のいずれかの同値な条件を満たすことを言います。

- **定義 A (位相空間に由来する定義)** : ある位相空間 X が存在して、ロケール L が X の開集合系のなすロケール $\mathcal{O}(X)$ と同型になること ($L \cong \mathcal{O}(X)$)。つまり、「現実の位相空間の開集合系として完全に実現できるロケール」を指します。
- **定義 B (内部の代数構造による定義)** : ロケール L の任意の異なる元を見分けるために、「十分な点がある (has enough points)」こと。厳密には、任意の $a, b \in L$ について、 $a \not\leq b$ であるならば、ある点 p が存在して $p(a) = 1$ かつ $p(b) = 0$ となることを指します。

ここでロケールの「点」とは、ロケール L から1点空間のロケール (真偽値 $\{0, 1\}$ の束) への射のことであり、束論における「完全素フィルター」に対応します。点が十分でない (幽霊点ばかりの) ロケールは、現実の位相空間から作ることができないため、空間的ではありません。

5. 代数幾何学における劇的な実例

この圏同値のメカニズムは、古典的な代数多様体からスキーム理論へのパラダイムシフトにおいて、最も鮮やかに可視化されます。

1点空間を $X = \{x_0\}$ とします。その開集合系は $\mathcal{O}(X) = \{\emptyset, X\}$ です。

フレーム準同型 $\phi: \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ を、「 $\phi(\emptyset) = \emptyset$ 、それ以外の空でない開集合 U に対しては $\phi(U) = X$ 」と定めます。

失敗例：古典的な多様体 (T_1 だが Sober ではない)

- **空間**: $Y = \mathbb{C}$ (Zariski位相)
- **性質**: 開集合系は「有限個の点を除いた集合」。 \mathbb{C} 全体は既約閉集合だが、生成点を持たない。
- **結果**: 任意の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ は Y の1点を選ぶ操作。 f^{-1} は決して ϕ と一致しない (ϕ は全体という幽霊点を指しているため)。

成功例：スキーム (Sober だが T_1 ではない)

- **空間**: $Y = \text{Spec } \mathbb{C}[x] = \mathbb{C} \sqcup \{(0)\}$
- **性質**: 空間全体を閉包として持つ**生成点** (0) が存在する。
- **結果**: 連続写像 f として $f(x_0) = (0)$ を選ぶ。 (0) は空でないすべての開集合に含まれるため、 $f^{-1}(U) = X$ となり、見事に $f^{-1} = \phi$ が成立する。

このように、空間にすべての素イデアル (生成点) を含め、空間を強制的に Sober 化するグロタンディークの手法により、幾何学 (空間の圏) と代数 (環や束の圏) の間に、一切の不整合がない完全な翻訳体系が構築されています。